MỘT SỐ BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

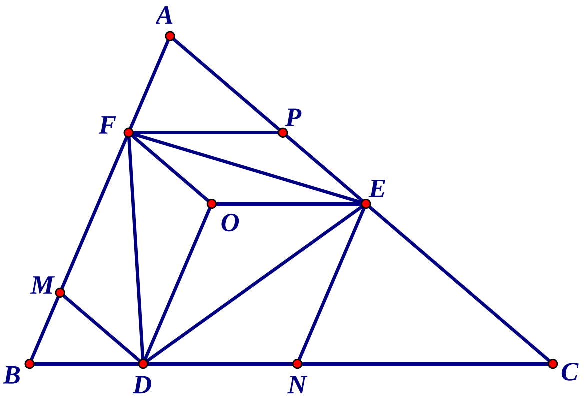
Lục Bình – Giáo viên trường Trưng Vương
Phòng Giáo dục Trung học biên tập

Bài viết trình bày một số kết quả về bất đẳng thức trong tam giác. Từ những bài toán đó có thể hướng dẫn học sinh phát hiện ra bài toán mới. Rất mong được sự trao đổi của quý đồng nghiệp.

Bài 1: Cho tam giác ABC và O là một điểm bất kì trong tam giác. Kẻ tia Ox song song AB cắt BC tại D, tia Oy song song BC cắt CA tại E, tia Oz song song CA cắt AB tại F. Chứng minh rằng:

a) $S_{DEF} \le \frac{1}{3} S_{ABC}$

b) $OD.OE.OF \le \frac{1}{27}.AB.BC.CA$



Lời giải:

a) Các đường thẳng qua D,E,F lần lượt song song với CA,AB,BC cắt AB,BC,CA theo thứ tự tại M,N,P.

Đặt $S_{ABC} = S;\ S_{AFP} = S_1; S_{BMD} = S_2; S_{CNE} = S_3$,

$DN = OE = FP; EP = OF = DM; FM = OD = EN$ ta có các tứ giác $ODNE, OEPF, OFMD$ là hình bình hành.

Do $2S_{DEF} = S_{DMFPEN} = S_{ABC} - \left(S_{AFP} + S_{BMD} + S_{CEN}\right)$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với chứng minh: $S_1 + S_2 + S_3 \ge \frac{1}{3} S$

Các tam giác AFP, BMD, CEN đồng dạng với tam giác ABC suy ra:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{FP}{BC}\right)^2 = \left(\frac{OE}{BC}\right)^2 = \left(\frac{DN}{BC}\right)^2; \frac{S_2}{S} = \left(\frac{DM}{CA}\right)^2 = \left(\frac{OF}{CA}\right)^2 = \left(\frac{BD}{BC}\right)^2; \frac{S_3}{S} = \left(\frac{EN}{AB}\right)^2 = \left(\frac{OD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{NC}{BC}\right)^2$$

Do đó: $\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \left(\frac{DN}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BD}{BC}\right)^2 + \left(\frac{NC}{BC}\right)^2 \ge \frac{1}{3}\left(\frac{BD}{BC} + \frac{DN}{BC} + \frac{NC}{BC}\right)^2 = \frac{1}{3}$

b) Ta có: $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{OE}{BC} = \frac{DN}{BC}; \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{OF}{CA} = \frac{BD}{BC}; \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{OD}{AB} = \frac{NC}{BC}$

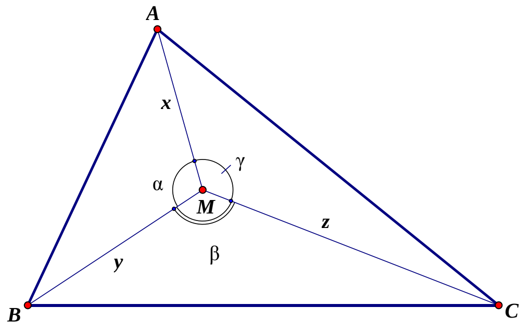
Suy ra $\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{BD + DN + NC}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{S_1 S_2 S_3}}{S\sqrt{S}} \le \frac{1}{27}$

và $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}.\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}.\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{OE}{BC}.\frac{OF}{CA}.\frac{OD}{AB} \Rightarrow \frac{OD.OE.OF}{AB.BC.CA} \le \frac{1}{27}$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $BD = DN = NC$ hay O là trọng tâm tam giác.

Bài 2: Cho tam giác ABC có diện tích S. Gọi x,y,z lần lượt là khoảng cách từ điểm M trong tam giác đến ba đỉnh A,B,C.

Chứng minh: $(x+y+z)^2 \ge 4\sqrt{3}S$.



Lời giải:

Đặt $AMB = \alpha,\ BMC = \beta,\ CMA = \gamma$. Ta có: $S = \frac{1}{2}\left(xy\sin\alpha + yz\sin\beta + zx\sin\gamma\right);\ \alpha + \beta + \gamma = 2\pi$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$(x+y+z)^2 \ge 2\sqrt{3}\left(xy\sin\alpha + yz\sin\beta + zx\sin\gamma\right)^{(1)}$

Ta có $\sqrt{3}\sin\alpha = = \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right) \le 1+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$,

tương tự $\sqrt{3}\sin\beta \le 1+\cos\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)$, $\sqrt{3}\sin\gamma \le 1+\cos\left(\gamma-\frac{\pi}{3}\right)$.

Đặt $a=\alpha-\frac{\pi}{3}$, $\mathrm{b}=\beta-\frac{\pi}{3}$, $\mathrm{c}=\gamma-\frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow a+b+c=\pi$ khi đó

$2\sqrt{3}xy\sin\alpha \le 2xy(1+\cos a); 2\sqrt{3}yz\sin\beta \le 2yz(1+\cos b); 2\sqrt{3}zx\sin\gamma \le 2zx(1+\cos c)$

suy ra $2\sqrt{3}\left(xy\sin\alpha + yz\sin\beta + zx\sin\gamma\right) \le 2xy(1+\cos a) + 2yz(1+\cos b) + 2zx(1+\cos c)^{(2)}$.

Ta chứng minh: $(x+y+z)^2 \ge 2xy(1+\cos a) + 2yz(1+\cos b) + 2zx(1+\cos c)^{(3)}$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \ge 2xy\cos a + 2yz\cos b + 2zx\cos c$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2(y\cos a + z\cos c)x + y^2 + z^2 - 2yz\cos b \ge 0.$$

Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 2(y\cos a + z\cos c)x + y^2 + z^2 - 2yz\cos b$ có

$$\Delta' = (y\cos a + z\cos c)^2 - y^2 - z^2 + 2yz\cos b$$

$$= y^2\left(1-\sin^2 a\right) + z^2\left(1-\sin^2 c\right) + 2yz\cos a.\cos c - y^2 - z^2 - 2yz\cos(a+c)$$

$$= -y^2\sin^2 a - z^2\sin^2 c + 2yz\sin a.\sin c = -(y\sin a - z\sin c)^2 \le 0 \Rightarrow f(x) \ge 0\ \forall x \in R$$

Vậy bất đẳng thức (3) đúng. Từ (2) và (3) ta có (1).

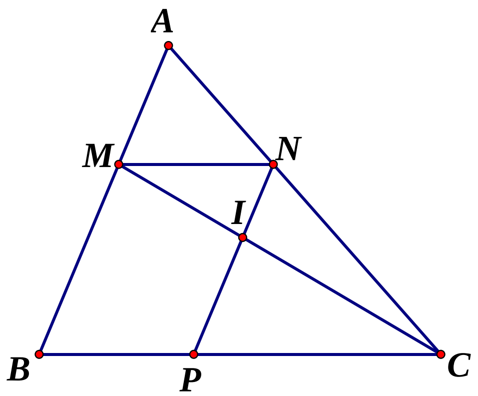
Đẳng thức xảy ra chỉ khi

$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\gamma+\frac{\pi}{3}\right) = -1 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=\frac{2\pi}{3} \Rightarrow a=b=c=\frac{\pi}{3}$. Vậy ΔABC đều.

Bài 3: Cho tam giác *ABC* và điểm *M* trên cạnh *AB*. Đường thẳng qua *M* và song song với *BC* cắt *AC* tại *N*. Đường thẳng qua *N* và song song với *AB* cắt *CM* tại *I*.

Chứng minh: $S_{IMN} \le \frac{4}{27}S_{ABC}$

Lời giải:



Gọi $P = NI \cap BC$. Do $MN//BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = x$.

$NP//AC \Rightarrow \frac{CP}{CB} = \frac{NP}{AB} = \frac{MB}{AB} = \frac{AB-AM}{AB} = 1-\frac{AM}{AB} = 1-x$

$\Delta IMN \sim \Delta ICP \Rightarrow \frac{S_{IMN}}{S_{ICP}} = \left(\frac{MN}{PC}\right)^2 = \left(\frac{MN}{(1-x)BC}\right)^2 = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$

$\Delta ICP \sim \Delta MCB \Rightarrow \frac{S_{ICP}}{S_{MCB}} = \left(\frac{CP}{CB}\right)^2 = (1-x)^2$

$\frac{S_{CBM}}{S_{CBA}} = \frac{BM}{BA} = 1-x$. Suy ra:

$$\frac{S_{IMN}}{S_{ICP}}.\frac{S_{ICP}}{S_{MCB}}.\frac{S_{CBM}}{S_{CBA}} = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2.(1-x)^2.(1-x) \Rightarrow \frac{S_{IMN}}{S_{ABC}} = x^2(1-x) \le \frac{1}{2}\left(\frac{x+x+(2-2x)}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 2-2x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow AM = 2MB$.

(Kì sau đăng tiếp)