MỘT VÀI HƯỚNG TIẾP CẬN BẤT ĐẲNG THỨC

GV: Nguyễn Văn Ái – Trường THPT Lê Thế Hiếu

Phòng GDTrH Biên tập

Bất đẳng thức là một đề tài hay, hấp dẫn nhiều bạn trẻ yêu toán và là nội dung xuất hiện trong hầu hết các cuộc thi HSG các cấp. Các phương pháp chứng minh bất đẳng thức cũng rất đa dạng. Trong khuôn khổ bài viết này, bản thân xin được đề cập đến một vài phương pháp chứng minh bất đẳng thức:

- Phương pháp biến đổi tương đương.

- Phương pháp sử dụng các bất đẳng thức cổ điển.

- Phương pháp ép biên.

- Phương pháp đạo hàm.

- Phương pháp lượng giác.

- Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Schur cùng phương pháp S-S.

Vì vấn đề thời gian nên bản thân không thể giới thiệu một cách đầy đủ, mà chỉ điểm lại các phương pháp trên thông qua 1 vài ví dụ cụ thể. Hầu hết các ví dụ này được chọn từ các tạp chí Toán học số ra gần đây, nhằm mục đích cùng các thầy cô tìm tòi và phân tích lời giải bằng tư duy của mình, từ đó trao đổi về các hướng tiếp cận bất đẳng thức.

Rất mong nhận được các lời giải hay cùng các ý kiến góp ý từ các thầy cô để bài viết được hoàn chỉnh hơn. Xin chân thành cảm ơn!

A. LÝ THUYẾT

1. Bất đẳng thức AM-GM, bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

2. Bất đẳng thức Schur

a) (Bất đẳng thức Schur): Cho a, b, c là các số thực không âm, k là số thực dương. Khi đó ta luôn có:

$$a^k(a-b)(a-c)+b^k(b-c)(b-a)+c^k(c-a)(c-b)\ge 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b;\ c=0$ và các hoán vị.

b) (Bất đẳng thức Schur suy rộng): Cho a, b, c, x, y, z là các số thực không âm sao cho (a,b,c) và (x,y,z) là các bộ đơn điệu. Khi đó ta luôn có:

$$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\ge 0$$

3. Một số đánh giá cơ bản

a) $(a+b)^2\ge 4ab$; $2\left(a^2+b^2\right)\ge(a+b)^2$ với mọi số thực a, b. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b.

b) $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$; $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$ với mọi số thực a, b, c. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

4. Các hệ thức lượng trong tam giác.

Trong bài viết này, nếu không có sự nhầm lẫn gì, ta ký hiệu $\sum$ là tổng các hoán vị. Ví dụ:

$\sum a^2b = a^2b + b^2c + c^2a$.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA

Bài 1. (T5/478 - Tạp chí TH&TT) Cho ba số thực dương a, b, c sao cho $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{abc}\left(\frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{1}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{1}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\right).$$

<u>Phân tích và lời giải:</u>

Đặt $x=\sqrt{a}; y=\sqrt{b}; z=\sqrt{c}$. Ta có $x,y,z>0; x+y+z=1$. Khi đó:

$$P=xyz\sum\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+z^2\right)}}$$

Cách 1 (của thầy Nguyễn Văn Lương):

Để tìm maxP, ta cần đánh giá mẫu $\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+z^2\right)}\geq ?$ hay là một đánh giá kiểu $x^2+y^2\geq ???$. Điều này gợi đến một kết quả quen thuộc $2\left(x^2+y^2\right)\geq(x+y)^2$. Từ đó ta có:

$$P\leq 2xyz\sum\frac{1}{(x+y)(x+z)}=\frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+y)}\leq\frac{4xyz}{2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx}}=\frac{1}{2}$$

Cách 2 (của thầy Phan Chiến Thắng):

Ta cần đánh giá mẫu $\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+z^2\right)\geq ?\longrightarrow$ Ta liên tưởng đến BĐT Cauchy-Schwarz:

$$P=xyz\sum\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+z^2\right)}}\leq xyz\sum\frac{1}{xy+xz}=\sum\frac{yz}{y+z}\leq\sum\frac{y+z}{4}=\frac{1}{2}$$

Cách 3: Tư duy tương tự cách 1, ta cần đánh giá kiểu $x^2+y^2\geq ???\longrightarrow$ Áp dụng kết quả quen thuộc $x^2+y^2\geq 2xy$ ta có:

$$P\leq xyz\sum\frac{1}{2x\sqrt{yz}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)\leq\frac{1}{2}(x+y+z)=\frac{1}{2}$$

Cách 4: $\dfrac{\sqrt{abc}}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}=\sqrt{a}.\sqrt{\dfrac{b}{a+b}.\dfrac{c}{a+c}}\longrightarrow$ Áp dụng BĐT AM-GM kiểu $\sqrt{xy}\leq\dfrac{x+y}{2}$

$$\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\leq\frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}\right)$$

Do đó: $P\leq\sum\dfrac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{2(a+b)}\leq\sum\dfrac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{4\sqrt{ab}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}=\dfrac{1}{2}$

Vậy: $\max P=\dfrac{1}{2}$ **khi** $a=b=c=\dfrac{1}{9}$

Bài 2. Cho x, y là các số thực không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}.$$

Phân tích và lời giải:

Cách 1 : Ta tìm cách "khử mẫu" bằng cách đặt $a=\frac{1}{x+1}; b=\frac{1}{y+1}$ với $a,b\in(0;1]$. Ta có

$$P=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{a+b-1}{ab}\right)a^2b^2=(b-a)(b+a-1)=b^2-b+a-a^2.$$

Từ đây suy ra: $b^2-b\le P\le a-a^2\Rightarrow -\frac{1}{4}\le P\le\frac{1}{4}$

$$P=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\ ;\qquad P=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$$

Vậy $P_{max}=\frac{1}{4}; P_{\min}=-\frac{1}{4}$

Cách 2: Nhận xét rằng mẫu của P là số dương, còn tử của P có dạng a.b$\longrightarrow$ Sử dụng bất đẳng thức: $ab\le\frac{(a+b)^2}{4}$ ta có:

$$P=\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}\le\frac{\left[(x-y)+(1-xy)\right]^2}{4(1+x)^2(1+y)^2}=\frac{(1-y)^2(1+x)^2}{4(1+x)^2(1+y)^2}=\frac{(1-y)^2}{4(1+y)^2}\le\frac{(1+y)^2}{4(1+y)^2}=\frac{1}{4}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=1-xy\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

Ta lại thấy $P=F(x,y)=-F(y,x)\Rightarrow -P=\frac{(y-x)(1-yx)}{(1+y)^2(1+x)^2}\le\frac{1}{4}\Rightarrow P\ge-\frac{1}{4}$.

Vậy $P_{max}=\frac{1}{4}; P_{\min}=-\frac{1}{4}$

Cách 3: Cấu trúc của P gợi ta đổi biến kiểu lượng giác:

Đặt $x=\tan a, y=\tan b$ với $a,b\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, ta có:

$$P=\frac{(\tan a-\tan b)(1-\tan a.\tan b)}{(1+\tan a)^2(1+\tan b)^2}=\frac{\sin(a-b)\cos(a+b)}{\left[(\sin a+\cos a)(\sin b+\cos b)\right]^2}=\frac{\sin(a-b)\cos(a+b)}{\left[\sin(a+b)+\cos(a-b)\right]^2}$$

Ta có: $P\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4\sin(a-b)\cos(a+b)\le\sin^2(a+b)+\cos^2(a-b)+2\sin(a+b)\cos(a-b)$

$\Leftrightarrow 2(\sin 2a-\sin 2b)\le 1+\sin 2a\sin 2b+\sin 2a+\sin 2b$

$\Leftrightarrow (1-\sin 2a)+\sin 2b(3+\sin 2a)\ge 0$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng với mọi $a,b\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2a=1\\\sin 2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{\pi}{4}\\b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

Vậy $P_{max}=\frac{1}{4}; P_{\min}=-\frac{1}{4}$

Cách 4 (của thầy Nguyễn Văn Lương):

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{-\text{y}\text{x}^2+\left(1+y^2\right)x-y}{\left(1+y\right)^2\left(x^2+2x+1\right)}$ với $x\in\left[0;+\infty\right)$.

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{1-\text{x}^2}{\left(x+1\right)^4}$.

Lập bảng biến thiên của hàm f ta suy ra: $\dfrac{-y}{\left(1+y\right)^2}\le f\left(x\right)\le\dfrac{\left(1-y\right)^2}{4\left(1+y\right)^2}\Rightarrow-\dfrac{1}{4}\le f\left(x\right)\le\dfrac{1}{4}$

Bài 3. (P61 - Tạp chí Pi) Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{2\left(ab+bc+ca\right)}{a^2+b^2+c^2}\le\frac{7}{2}.\qquad(1)$$

Giải:

Cách 1:

$$(1)\Leftrightarrow\frac{b+c-a}{b+c}+\frac{c+a-b}{c+a}+\frac{a+b-c}{a+b}\ge\frac{2\left(ab+bc+ca\right)}{a^2+b^2+c^2}-\frac{1}{2}\qquad(2)$$

$$VT\left(2\right)\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\sum\left(b+c-a\right)\left(b+c\right)}=\frac{\left(a+b+c\right)^2}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}\ge\frac{4\left(ab+bc+ca\right)-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}=VP(2)$$

Cách 2:

$$(1)\Leftrightarrow\sum\left(\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}\right)+\frac{2\left(ab+bc+ca\right)}{a^2+b^2+c^2}-2\le0\Leftrightarrow\sum\frac{\left(a-b\right)+\left(a-c\right)}{2\left(b+c\right)}-\frac{\sum\left(a-b\right)^2}{a^2+b^2+c^2}\le0$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{\left(a-b\right)^2}{2\left(b+c\right)\left(c+a\right)}-\frac{\sum\left(a-b\right)^2}{a^2+b^2+c^2}\le0\Leftrightarrow\sum\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)-2\left(b+c\right)\left(c+a\right)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}\left(a-b\right)^2\le0$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{2\left(ab+ac+bc\right)+c^2-a^2-b^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}\left(a-b\right)^2\ge0$$

BĐT cuối hiển nhiên đúng vì ta luôn có $2\left(ab+ac+bc\right)>a^2+b^2+c^2$.

Bài 4. (T9/481 - Tạp chí TH&TT) Cho ba số thực không âm x,y,z thỏa mãn $2^x+4^y+8^z=4$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}$.

Hướng dẫn:

Đặt $a=2^x;b=2^{2y};c=2^{3z}$. Ta có $a,b,c\ge1$ và $a+b+c=4$. Khi đó:

$$S=\frac{\log_2a+\log_2b+\log_2c}{6}=\frac{\log_2\left(abc\right)}{6}$$

Bài toán quy về: Tìm GTLN và GTNN của $P=abc$ với $a,b,c\ge1$ và $a+b+c=4$.

i) $P=abc\le\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3=\dfrac{64}{27}\Rightarrow S\le\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{4}{3}$

ii) Ta có

$(b-1)(c-1)\geq 0 \Rightarrow bc\geq b+c-1$. (1)

Tương tự $ab\geq a+b-1; ac\geq a+c-1$

Suy ra $abc\geq ab+ac-a\geq (a+b-1)+(a+c-1)-a=a+b+c-2=2$.

Cách 2: Từ (1) ta suy ra: $abc\geq a(b+c-1)=a(3-a)=f(a)$. Do $a\in[1;2]$ nên ta suy ra $\min\limits_{[1;2]} f(a)=f(1)=f(2)=2$

Bài 5. (Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2016-2017) Với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=2$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\dfrac{a+1}{a^2+2a+2}+\dfrac{b+1}{b^2+2b+2}+\dfrac{c+1}{c^2+2c+2}$.

Giải:

Cách 1: Đặt $\dfrac{1}{x}=a+1, \dfrac{1}{y}=b+1, \dfrac{1}{z}=c+1$. Ta có $x,y,z>0$ và thỏa mãn: $xy+yz+zx=1$.

Khi đó: $M=\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}+\dfrac{z}{z^2+1}$.

Ta thấy: $M=\sum\dfrac{x}{x^2+1}=\sum\dfrac{x}{x^2+xy+yz+zx}=\sum\dfrac{x}{(x+y)(x+z)}=\dfrac{2(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

$\Rightarrow M=\dfrac{2(xy+yz+zx)}{(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz}$.

Mặt khác theo AM-GM ta có $xyz\leq\dfrac{1}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)$ nên ta suy ra

$$\Rightarrow M\leq\frac{2(xy+yz+zx)}{\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)}=\frac{9}{4(x+y+z)}\leq\frac{9}{4\sqrt{3(xy+yz+zx)}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Vậy $M_{max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ khi $a=b=c=\sqrt{3}-1$

Cách 2: Dùng phương pháp lượng giác.

Bài 6. (T9/480 - Tạp chí TH&TT) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $24ab+44bc+33ca\leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P(a,b,c)=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

Hướng dẫn:

Đặt $x=\dfrac{1}{a}; y=\dfrac{1}{b}; z=\dfrac{1}{c}$, ta có: $44x+33y+24z\leq xyz\Rightarrow x\geq\dfrac{33y+24z}{yz-44}\left(y>\dfrac{44}{z}\right)$. Khi đó:

$$P(a,b,c)=x+y+z\geq\frac{33y+24z}{yz-44}+y+z=\frac{zy^2-11y+24z}{yz-44}+z=f(y).$$

$f'(y)=1-\dfrac{1452-24z^2}{(yz-44)^2}=\dfrac{z^2y^2-88zy+484+24z^2}{(yz-44)^2}$. Lập bảng biến thiên ta suy ra:

$$f(y)\geq f(y_0) \text{ với } y_0=\frac{44z+\sqrt{1452z^2-24z^4}}{z^2}=\frac{44}{z}+\frac{2\sqrt{363-6z^2}}{z}$$

Khi đó:

$$P(a,b,c) \ge 2y - \frac{11}{z} + z = z + \frac{77}{z} + \frac{4\sqrt{363-6z^2}}{z} = g\left(z\right).$$

Đến đây, lập bảng biến thiên của hàm g ta suy ra kết quả bài toán.

Bài 7. (T9/480 - Tạp chí TH&TT)

Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{3} \le \sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2} + \sqrt{1+c^2} - a - b - c \le 2.$$

Giải:

Đặt: $F\left(a,b,c\right) = \sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2} + \sqrt{1+c^2} - a - b - c$

Do a,b,c không âm và thỏa mãn $ab+bc+ca=1$ nên tồn tại tam giác ABC không tù sao cho $a=\cot A; b=\cot B; c=\cot C$. Khi đó:

$$F\left(a,b,c\right) = \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - \cot A - \cot B - \cot C$$

$$= \sum \frac{1-\cos A}{\sin A} = \sum \frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \sum \tan\frac{A}{2} \ge \sqrt{3\sum \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \sqrt{3}$$

Bài 8. (T7/478 - Tạp chí TH&TT) Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Xét biểu thức:

$$F\left(a,b,c\right) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab\left(a+b\right) - bc\left(b+c\right) - ca\left(c+a\right).$$

Chứng minh rằng: $F\left(a,b,c\right) \le \min\left(F\left(a+b,b+c,c+a\right); 4a^2b^2c^2F\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)\right)$

Phân tích và lời giải:

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a \le b \le c$.

Trước hết, ta thấy: $F\left(a,b,c\right) = a\left(a-b\right)\left(a-c\right) + b\left(b-c\right)\left(b-a\right) + c\left(c-a\right)\left(c-b\right)$

Từ đó:

i) $F\left(a+b,b+c,c+a\right) = \left(a+b\right)\left(a-c\right)\left(b-c\right) + \left(b+c\right)\left(b-a\right)\left(c-a\right) + \left(c+a\right)\left(c-b\right)\left(a-b\right)$

Suy ra:

$$F\left(a+b,b+c,c+a\right) - F\left(a,b,c\right) = \sum \left(b+c-a\right)\left(a-b\right)\left(a-c\right)$$

Ta có $b+c-a \ge c+a-b \ge a+b-c > 0$ nên theo BĐT Schur suy rộng:

$$F\left(a+b,b+c,c+a\right) - F\left(a,b,c\right) \ge 0.$$

ii) $4a^2b^2c^2F\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right) = 4a^2b^2c^2\sum \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right) = \sum \frac{4bc}{a}\left(b-a\right)\left(c-a\right)$

$$4a^2b^2c^2F\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right) - F\left(a,b,c\right) = \sum \frac{4bc-a^2}{a}\left(a-b\right)\left(a-c\right) = Q(a,b,c)$$

Đến đây nếu ta có: $\frac{4bc-a^2}{a} \ge \frac{4ac-b^2}{b} \ge \frac{4ab-c^2}{c} > 0$ thì áp dụng BĐT Schur suy rộng ta suy ra ngay kết quả. Nhưng rất tiếc bất đẳng thức cuối không phải lúc nào cũng đúng.

Ta thử dùng tư tưởng của phương pháp S-S: Biến đổi Q về dạng

$Q(a,b,c) = M\left(a-b\right)^2 + N\left(c-a\right)\left(c-b\right)$ với $M, N \ge 0$

$$Q(a,b,c)=(a-b)\left(\frac{4bc-a^2}{a}(a-c)-\frac{4ac-b^2}{b}(b-c)\right)+\frac{4ab-c^2}{c}(c-a)(c-b)$$

$$=(a-b)^2\frac{\left(-a^2b-ab^2-3abc+4ac^2+4bc^2\right)}{ab}+\frac{4ab-c^2}{c}(c-a)(c-b)$$

Ta có $M.ab=(a+b)\left(c^2-ab\right)+3c(ac+bc-ab)>0\Rightarrow M>0$. **Nhưng N chưa hẳn không âm nên ta có ý tưởng là thêm bớt kiểu:**

$Q(a,b,c)=\left[M-x(c-a)(c-b)\right](a-b)^2+\left[N+x(a-b)^2\right](c-a)(c-b)$ **sao cho các biểu thức** $\left(M-x(c-a)(c-b)\right)$ **và** $\left(N+x(a-b)^2\right)$ **không âm** $\longrightarrow$ Chọn $x=\frac{1}{c}$ ta có:

$N+x(a-b)^2>0$;

$$M-\frac{(c-a)(c-b)}{c}=\frac{4c^3(a+b)-4c^2ab-a^2b^2}{abc}=\frac{4c^2a(c-b)+4c^3b-a^2b^2}{abc}>0$$

Vậy: $4a^2b^2c^2F\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)-F(a,b,c)\ge 0$. Suy ra đpcm.

Bài 9. (T8/478 - Tạp chí TH&TT)

Cho tam giác ABC là tam giác nhọn. a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB. R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Chứng minh rằng: $\frac{r}{2R}\le\frac{abc}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}}$ (1)

Giải:

Cách 1 (của thầy Đậu Anh Hùng):

Ta có: $\frac{r}{2R}=\frac{2S^2}{pabc}$. Nên:

$(1)\Leftrightarrow(b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\le 8a^4b^4c^4$.

Ta có:

$$(a+c-b)(a+b-c)\left(b^2+c^2\right)=\left(a^2-(b-c)^2\right)\left(b^2+c^2\right)$$

$$=\left(a^2-b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2\right)+2bc\left(b^2+c^2\right)=\left(a^2-b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2\right)+2bc\left(a^2+b^2+c^2-a^2\right)$$

$$=2a^2bc-\left(b^2+c^2-a^2\right)(b-c)^2\le 2a^2bc$$

Suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Cách 2: $VP(1)=\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sqrt{2\left(\sin^2 A+\sin^2 B\right)\left(\sin^2 B+\sin^2 C\right)\left(\sin^2 C+\sin^2 A\right)}}$

$$\sin^2 A+\sin^2 B=1-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)=1+\cos C.\cos(A-B)\le 1+\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}$$

Suy ra $VP(1)\ge\frac{\sin A\sin B\sin C}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{2R}$.